Conjectura de Dinitz, Emparelhamentos estáveis e Pinturas de Grafos

Raúl Penaguião

2011 - 2012

Part I
O Objectivo

Desde o convite para o projecto *Novos Talentos* que procurava algo na área da Combinatória. Como tal, fui levado ao Professor José Fachada, que me falou em dois problemas dessa mesma área, e cujas soluções tiveram mesmo um lugar no livro *Proofs From The Book*. Um deles foi o principal alvo do meu trabalho ao longo deste ano, o chamado *Problema de Dinitz*.

O estudo desses dois problemas levou-me a trabalhar com grafos, onde estudei emparelhamentos estáveis, levando-me à solução do problema de Dinitz. Depois de conhecer a solução de Jeff Dinitz, o meu tutor deu-me um artigo sobre o algoritmo de admissão de alunos em universidades, e situações semelhantes, no seguimento do estudo de emparelhamentos estáveis.

Também em modo de continuação do trabalho, o meu tutor facultou-me alguns artigos mais recentes, que explicam a aplicação de emparelhamentos estáveis em polítopos, *latices*, e certas complicações específicas do algoritmo "Propõe-Dispõe", de forma a que eu explore a teoria por trás dos emparelhamentos estáveis.

Desta forma, vou expor os conteúdos que ao longo do ano assimilei.

Part II
Conjectura de Dinitz

1 O Problema

Foi há cerca de 40 anos que Jeff Dinitz colocou uma questão sobre coloração de matrizes. A história começa com um quadrado latino: uma matriz com cores em cada uma das entradas, sem repetição em cada uma das linhas e das colunas.

Ao preencher o quadrado latino, podemos impor algumas restrinções. Nesse sentido definimos um quadrado de Dinitz.

Definição 1. *A uma matriz quadrada A, $n \times n$, onde cada entrada é um conjunto $S_{i,j}$ de n elementos, chamamos um* **Quadrado de Dinitz***.*

Diz-se que um Quadrado de Dinitz A é **solúvel** *se existe uma matriz L tal que $(L)_{(i,j)} \in S_{i,j}$, e que L seja um quadrado latino.*

Um quadrado de Dinitz tem este aspecto: $A = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{1,3\} \\ \{1,2\} & \{2,3\} \end{pmatrix}$

Conjectura 1. *Conjectura de Dinitz*

Todo o quadrado de Dinitz é solúvel.

Este é o típico problema que é fácil de enunciar e difícil de atacar.

Esta conjectura apareceu em 1978, por Jeff Dinitz, de uma maneira mais geral em que não se considerava somente os quadrados, mas rectângulos em que n é o comprimento do maior lado.

Apos 2 décadas de luta contra um problema que parecia inacessível, o fim ficou à vista em 1993: Jeannette Janson provou a conjectura para rectângulos; em 1995 Fred Galvin prova o resultado para quadrados com as mesmas ideias de Jeannette Janson. A prova que maravilhou o mundo matemático por ser da típica beleza da combinatória estava já na praça pública, e uma adaptação veio mesmo a constar na seleção ”Proofs From The Book”, de Martin Aigner.

2 O Ataque ao Problema

Vamos ver alguns casos em que podemos fazer contas de merceeiro.

Exemplo 1. *Tomemos o quadrado* $A = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{1,3\} \\ \{1,2\} & \{2,3\} \end{pmatrix}$

A conjectura afirma que podemos transformar A num quadrado latino. Observemos que, se começarmos a construir manualmente, digamos, escolhendo a cor 2 para a entrada $(2,1)$, somos forçados a escolher a cor 1 para a entrada $(1,1)$ e a cor 3 para a entrada $(1,2)$,

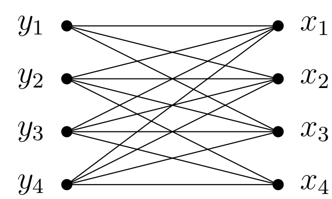

Figure 1: Grafo $\mathcal{K}_{4,4}$

convencemo-nos rapidamente que vai ser impossível concluir o quadrado de forma a torna-lo latino.

Uma possível solução será $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Neste caso podemos simplesmente recorrer à observação e tentativa-e-erro, mas existem casos em que tal é categoricamente impossível.

Exemplo 2. *Tomemos o quadrado* $B = \begin{pmatrix} \{2,3,4,5\} & \{1,3,4,5\} & \{3,4,5,6\} & \{2,4,5,6\} \\ \{2,3,5,6\} & \{2,4,5,6\} & \{2,4,5,6\} & \{3,4,5,6\} \\ \{1,3,4,5\} & \{1,2,4,5\} & \{1,4,5,6\} & \{1,2,3,4\} \\ \{2,4,5,6\} & \{2,3,4,5\} & \{1,2,4,6\} & \{1,3,5,6\} \end{pmatrix}$.

Para atacar estes casos, escolhemos outras formas de olhar para o problema. Vamos preocuparmo-nos em construir um grafo $L(D)$, similar a um quadrado de Dinitz. A ideia, por agora, será brincar com grafos, entender que interpretações pode o nosso problema ter.

Consideremos como vértices os pontos (i, j) onde $1 \leq i, j \leq n$, e unimos dois vértices com uma aresta se alguma das entradas coincide. Naturalmente, pintar os vértices de $L(D)$ é a mesma coisa que pintar as entradas de um quadrado de Dinitz adicionando as restrições sobre que cores podemos utilizar em cada vértice.

De forma equivalente, poderamos pintar as arestas de um outro grafo, a que vamos chamar $G = K_{4,4}$, e considerar que cada aresta de G é uma entrada do quadrado de Dinitz, onde a entrada (i, j) corresponde à aresta que vai do i-ésimo vértice duma coluna para o j-ésimo vértice da outra coluna. Veja-te a figura 1.

Neste grafo, vamos querer pintar as arestas, tal como queremos pintar as entradas do *Quadrado de Dinitz*, adicionando as restrições sobre que cores podemos utilizar em cada aresta. Como é natural, o objectivo é que duas arestas vizinhas não podem ter a mesma cor.

Com estes dois grafos connosco transformámos o problema de combinatória sobre quadrados de Dinitz num problema de grafos. No caso do grafo G, interessa-nos considerar o subgrafo das arestas que podemos colorir de uma cor, digamos, 1. Nesse subgrafo queremos pintar algumas arestas da cor 1, veja-se a figura 2. Mas a pintura terá de ser de forma a que nenhuma das diferentes arestas tenha um vértice em comum. A escolha das arestas tem de ser cuidada, no sentido das arestas terem de ser independentes, e também temos de pintar o máximo de arestas possível.

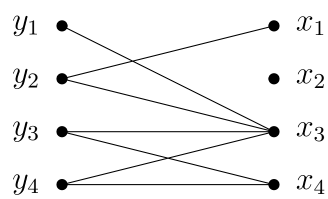

Figure 2: Grafo D para a cor 1

Part III
Emparelhamentos estáveis

O problema, chamado **Problema dos emparelhamentos**, em que nos vamos debruçar aqui pode ser levado no contexto de uma família finita $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots\}$ de universidades que vão aceitar estudantes da família finita $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots\}$. Neste caso, cada universidade tem as suas restrições em relação à nota de entrada de cada um dos estudantes, e em particular cada universidade tem a sua ordem de preferência distinta. Para conveniência vamos aceitar que não existem empates. Cada universidade tem um número n_i de vagas e uma lista ordenada U_i de estudantes que pode aceitar. Naturalmente, os estudantes em $\mathcal{B}$ têm, cada um, uma lista ordenada E_i de algumas universidades de $\mathcal{A}$.

Um **emparelhamento** é um subconjunto S de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, onde cada b_i aparece, no máximo, uma vez, e cada a_i aparece, no máximo, n_i vezes. A ideia abstracta mais utilizada aqui é considerar um grafo G bipartido nos conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, onde as arestas dizem-nos se, tanto a universidade a_i como o estudante b_j estão interessados na aplicação de b_j em a_i. Um emparelhamento seria um subconjunto das arestas de G com um máximo de uma aresta por vértice em $\mathcal{B}$, e um máximo de n_i arestas em a_i.

O nosso objectivo será colocar cada um dos estudantes nas universidades de forma **estável** e **óptima**. Para já, o critério de estabilidade não é claro, mas podemos observar que o contexto universidades-estudantes não é o único em que os emparelhamentos podem ser aplicados. Podemos considerar que a família $\mathcal{A}$ trata-se de raparigas e $\mathcal{B}$ de rapazes que procuram emparelhar-se para um baile de finalistas.

Neste caso, notemos que $n_i = 1$ por natureza, mas as listas ordenadas de preferências também surgem com naturalidade, bem como um critério de estabilidade: um rapaz e uma rapariga não estão emparelhados somente se algum deles estiver emparelhado com alguém melhor na sua lista de preferências.

Desta forma, podemos definir com rigor a estabilidade num emparelhamento. Notemos que, se a_i não estiver na lista E_j de b_j, podemos (e vamos usar tal terminologia) dizer sem perder generalidade que a_i é menos preferível que qualquer outro a_k.

Definição 2. *Par instável, Emparelhamento estável*

Num emparelhamento entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, um par a_i e b_j que não está no emparelhamento é *instável se nem a_i nem b_j está emparelhado com alguém preferível.*

Um emparelhamento é estável se não tiver pares instáveis.

Por simplicidade, se a_i não é menos aceitável quanto a_j, na lista de preferências de b_k, dizemos $a_i \geq_{b_k} a_j$. A esta notação vamos chamar a **ordenação pela óptica em sentido lato de** b_k, ou somente ordenação pela óptica se o contexto for claro. Definimos também de forma análoga a **ordenação pela óptica no sentido estrito** com $>_{b_k}$.

O critério de optimização será do ponto de vista dos estudantes, e dizemos que um emparelhamento estável S é **optimal** se, entre todos os emparelhamentos estáveis, todo o estudante está numa universidade preferível (em sentido lato) em S. É natural que com esta definição de emparelhamento optimal, este é único se existir, pois não há empates.

Definição 3. *Emparelhamento estável optimal*

Um emparelhamento S estável é optimal se, para todo o emparelhamento estável $S' \neq S$ se tem, para cada $(a_i, b_j) \in S'$ existe $(a_k, b_j) \in S$ tal que $a_k \geq_{b_j} a_i$

Assumindo que $n_i = 1\ \forall i$, existe uma dualidade nesta definição, pois podemos dizer que um emparelhamento é óptimo para a família $\mathcal{A}$ se para cada $(a_i, b_j) \in S'$ existe $(a_i, b_k) \in S$ tal que $b_k \geq_{a_i} b_j$. Isto é dizer, no contexto dos emparelhamentos entre rapazes e raparigas, podemos definir emparelhamento óptimo como o emparelhamento que é mais positivo para os rapaz, ou para as raparigas. Para fixar as ideias, a definição refere-se sempre à óptica da família $\mathcal{B}$.

Podemos colocar agora duas questões. Podemos garantir que existe sempre um casamento estável? Podemos construi-lo?

Na verdade, a resposta a esta questão depende da maneira como definimos o emparelhamento, e no nosso caso a definição leva-nos artificialmente à resposta mais agradável.

Noutro caso, poderíamos definir um emparelhamento num grafo genérico, em vez de definir num grafo bipartido, neste parágrafo a nossa noção de emparelhamento vai ser diferente. Um problema desse tipo é o **problema dos colegas de quarto**: quatro rapazes a_1, a_2, a_3 e a_4 têm de partilhar dois quartos duplos, e cada um tem a sua lista de preferências, onde a_1 prefere a_2, a_2 prefere a_3 e a_3 prefere a_1, e todos classificam a_4 como último. Independentemente da lista de preferências de a_4, ele vai ficar emparelhado com alguém, digamos, a_i que vai querer trocar, e de entre os outros dois, alguém prefere ficar emparelhado com a_i, criando um par instável.

Felizmente não é esse o caso, e de facto vamos poder garantir que existem sempre emparelhamentos estáveis. Vamos até construir o casamento estável optimal, por via do algoritmo de Gale-Shapley.

3 O algoritmo de Gale-Shapley

Por agora, vamos considerar que temos rapazes e raparigas, e pelas regras do politicamente correcto, consideramos $n_i = 1\ \forall i$, apesar de não se perder generalidade. Pela natureza deste algoritmo, vamos chama-lo, também, de algoritmo "Propõe-Dispõe".

Vamos supor que os rapazes estão todos numa sala e, à vez, vão para a sala das raparigas propor-se como par de uma delas.

As idas ocorrem uma de cada vez, e cada rapaz escolhe sempre a rapariga do topo da lista.

Quando uma rapariga recebe uma proposta de vários rapazes, recusa todos excepto o que prefere entre as propostas.

Quando um rapaz recebe uma recusa de uma rapariga, essa sai da sua lista e ele volta para a sala dos rapazes, caso contrário fica à espera.

O algoritmo termina quando todos os rapazes ou estiverem emparelhados, ou não puderem fazer mais nenhum pedido.

4 Análise do algoritmo de Gale-Shapley

O objectivo desta secção é, ente outros, notar e provar que o algoritmo devolve um emparelhamento estável.

Vamos primeiro sublinhar que o algoritmo é simétrico, no sentido que podiam ser as raparigas a proporem-se aos rapazes. Esse algoritmo simétrico, em geral, não dá o mesmo emparelhamento. Vamos também nesta secção provar que o emparelhamento obtido pelo algoritmo é um emparelhamento estável optimal, e pelo mesmo argumento, o algoritmo simétrico vai dar um emparelhamento estável optimal, mas na óptica das raparigas. Também vamos poder provar, mas mais tarde, que o emparelhamento dado por um algoritmo e pelo seu simétrico é o mesmo somente quando o emparelhamento estável é único.

Votando à questão da estabilidade do emparelhamento dado pelo algoritmo de Gale-Shapley, tal deve ser provado:

Lema 1. *Existem emparelhamentos estáveis*

Prova:

Supomos que, após o algoritmo, a Maria e o João não acabam emparelhados, e por contradição vamos supor que constituem um par instável. Então o João prefere a Maria ao seu par, e é claro que a dada altura o João se propôs à Maria. Então Maria rejeitou a proposta de João por ter uma proposta preferível. Então o par da Maria é preferével ao João contrariando a hipótese de instabilidade. Logo o emparelhamento é estável. □

O algoritmo pode ser transcrito para o contexto de admissão de estudantes em universidades, bem como para a linguagem mais abstracta que introduzimos. Para tal interpretação devemos considerar que cada elemento do conjunto $\mathcal{A}$ pode deixar até n_i pedidos pendentes. O leitor pode confirmar que a prova do Lema 1 pode ser transcrita da mesma forma para esta versão. O leitor mais rigoroso pode até restringir-se dos contextos e utilizar somente a noção de conjuntos.

A observação que nos resta fazer em relação ao algoritmo refere-se à optimização do emparelhamento.

Lema 2. *O emparelhamento dado pelo algoritmo é estável e óptimo.*

Prova:

Para cada estudante genérico b_i, vamos chamar possível a uma universidade se existe algum emparelhamento estável que o atribua a tal universidade. Dizemos que uma universidade é impossível se não for possível. Vamos então provar, por indução, que a cada passo nenhuma universidade possível recusou b_i. No início ainda não houve recusas, vamos supor que até um certo passo nenhum estudante foi recusado por uma universidade possível.

Suponhamos que a universidade A recusou α, queremos provar que a universidade A é impossível para α. Então, existem n_i estudantes $\beta_1, \cdots, \beta_{n_i}$ melhor classificados que α. Como tal, cada β_i prefere A a todas as outras universidades, excepto aquelas a que foi recusado (portanto impossíveis, por hipótese).

Consideremos um emparelhamento estável S hipotético, onde α é aceite em A e todos os outros estudantes estão aceites em universidades possíveis (ou não foram aceites em nenhuma). Pela limitação de vagas em A, algum β_i não foi aceite em A, ora (A, β_i) forma um par instável, pois β_i está numa universidade T possível, logo $A >_{\beta_i} T$, e por hipótese $\beta_i >_A \alpha$, logo S não é estável, uma contradição. Logo A não é uma universidade possível para α, e concluímos assim o passo de indução. □

Novamente fazemos as nossas reservas quanto ao contexto utilizado.

Como fizemos notar anteriormente, o emparelhamento estável óptimo é único. No entanto, o algoritmo de Gale-Shapley, na verdade, é uma família de algoritmos mais vasta do que primeiramente se nota. Qualquer resultado aqui provado se refere ao algoritmo apresentado, independentemente da ordem pela qual os elementos de $\mathcal{B}$ se propõe.

No entanto, em todos os diferentes algoritmos somos levados a um emparelhamento estável óptimo, que é único, logo:

Teorema 1. *Elasticidade do algoritmo "propõe-dispõe"*

O algoritmo de Gale-Shapley leva sempre ao mesmo resultado, independentemente da ordem pelas quais as propostas foram feitas.

Prova:

Como fizemos notar, o algoritmo leva sempre ao emparelhamento estável óptimo, que é único, independentemente da ordem, pelo que o algoritmo leva sempre ao mesmo resultado. □

Neste contexto, podemos criar e resolver muitos problemas relacionados com emparelhamentos estáveis.

Exercicio 1. *Prove que o número de propostas feitas, no algoritmo "Propõe-Dispõe", é independente da ordem pela qual as propostas são feitas.*

Exercicio 2. *Suponhamos que temos n rapazes $A_1, \cdots, A_n$, e para cada j, a_j é a preferida de A_j, de entre aquelas em que A_j se pode emparelhar estavelmente (estamos a supor que existe algum emparelhamento estável).*

Prove que, se $i \neq j$ então $a_i \neq a_j$

Exercicio 3. *Suponhamos que a matriz A de preferências dos homens é um quadrado latino (em cada coluna cada mulher aparece exactamente uma vez). Mostre que toda coluna da* *matriz A dá um emparelhamento estável se e só se a matriz de preferência das mulheres for uma matriz dual, isto é, a é a j-ésima escolha de A se e somente se A é a $(n+1-j)$-ésima escolha de a, para cada a e A.*

5 Corrupção no algoritmo "Propões-Dispõe"

Vamos agora supor que existe um jogador $M \in \mathcal{B}$ que pretende melhorar o seu emparelhamento, e para tal vai mentir na sua lista de preferências. O objectivo será provar que qualquer listagem que M faça não vai melhorar o seu emparelhamento (comparando na lista de preferências verdadeira). Vamos considerar que o problema trata-se de um **Problema de emparelhamentos completo**, isto é, todo o estudante classifica cada universidade, e cada universidade classifica todos os estudantes, e que mais nenhum jogador mente nas suas preferências.

Simplificações

Por simplicidade vamos supor que $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B}$ e que $n_i = 1\ \forall i$. Isto é possível porque, ao invés de ter uma universidade A com n_i vagas, criamos um problema em que temos n_i universidades, cada uma com 1 vaga, cada uma com as mesmas listas de preferência. Entre as novas universidades criadas, uma ordem fixa é atribuída para substituir o lugar de A nas listas de prefrências dos estudantes.

Se neste caso ainda não houver a igualdade $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B}$, criamos algumas universidade "fantasma", ou alguns estudantes "fantasma", que ficam classificados como últimos em todas as listas de preferências.

Desta forma, temos a garantia que $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B}$ e $n_i = 1\ \forall i$, logo, num emparelhamento estável, todos os estudantes e universidades vão ser emparelhadas, e cada emparelhamento estável μ cria uma bijecção entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Teorema 2. *Seja $M \in \mathcal{B}$, e supomos que vamos emparelhar $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de forma estável, usando o algoritmo "Propõe-Dispõe"*

Então, se todos forem verdadeiros nas suas listas de preferências, excepto M, este não conseguirá obter um par melhor mentindo.

Prova:

Veja-se [3, Theorem 9] $\square$

Este teorema pode ser generalizado, onde agora consideramos que um grupo de alunos se junta e mentem pelo melhor de todos no grupo.

Teorema 3. *Suponhamos que um subconjunto $M \subseteq B$ de jogadores mente nas suas preferências, o que vamos chamar de* **coação**. *Então existe $a \in M$ que não melhorou o seu emparelhamento.*

Prova:

Veja-se [3, Theorem 17] $\square$

Devemos fazer notar que, apesar da coação não poder melhorar em geral o emparelhamento dos participantes, pode ser que alguns melhorem e outros não. Consideremos a seguinte situação:

$\mathcal{A} = \{A, B, C\}$

$\mathcal{B} = \{a, b, c\}$

As preferências reais são:

U_A= (b, a, c)

U_B= (a, c, b)

E_a= (A, B, C)

E_b= (B, A, C)

E_c= (B, C, A)

A lista de preferências de C é irrelevante. Então o emparelhamento estável obtido, através do algoritmo "Propõe-Dispõe", será:

$A \to b$

$B \to a$

$C \to c$

Supomos agora que b e c formam uma coação, dizendo que as suas listas de preferências são:

E_b= (B, A, C)

E_c= (C, B, A)

Então o emparelhamento estável que se obtém é:

$A \to a$

$B \to b$

$C \to c$

Notemos que a também melhorou o seu emparelhamento. Notemos também que a mentira de b coincide com a verdade.

Estivémos sempre a falar de coacções de jogadores de $\mathcal{B}$, no entanto, uma coação entre as universidades é sempre possível porque, em geral, o algoritmo "Propõe-Dispõe" dá o pior emparelhamento para as universidades.

Part IV

Solução do Problema

A solução que aqui vou apresentar deve-se a uma adaptação para o livro *Proofs From The Book*. Primeiramente vamor recorrer a algumas definições.

Definição 4. *Colorações*

Pintar os vértices de um grafo não é tarefa difícil, mas vamos querer pintar de forma a que vértices vizinhos tenham cores distintas. Então, uma pintura é uma função "Colorir" $C : V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que, para vértices vizinhos a e b, tem-se $C(a) \neq C(b)$. Chamamos a uma tal coloração **admissível**.

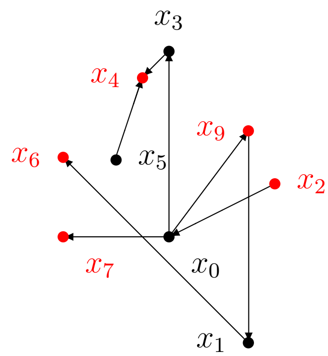

Figure 3: Núcleo de um grafo

Chamamos número cromático de um grafo $\chi(G)$ ao número mínimo de cores que precisamos de usar para pitnar os vértices de G de forma admissível.

Definição 5. *Colorações segundo funções*

Seja $f : V(G) \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ uma função onde G é um grafo, e $V(G)$ os seus vértices.

Um grafo G diz-se f-pintável se, para qualquer família de conjuntos $\{C_{v_1}, \cdots, C_{v_n}\}$ tais que $\#C_{v_i} = f(v_i)$, podemos pintar v_i, para cada i, de uma cor, escolhida de C_{v_i}. A pintura tem de ser admissível.

Chamamos número cromático de listas de um grafo $\chi_l(G)$ ao menor n tal que G é n-pintável (onde n aqui simplifica a expressão "função constante igual a n").

Definição 6. *Núcleo*

Num grafo orientado G, um núcleo é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ não vazio tal que:

- $I[S] = 0_n$, isto é, nenhum dos vértices em S é vizinho de outro.
- $\forall_{x \in V(G) \setminus S} \exists_{s \in S} : (x, s) \in E(G)$. Isto é dizer, todos os vértices estão ligados ao núcleo.

Aos grafos que, não só têm núcleo, como todos os subgrafos induzidos também têm núcleo, chamamos **Grafos nucleares**. Na figura 3 temos um exemplo do núcleo de um grafo.

Definição 7. *Grafo Linha*

Dado um grafo G, o grafo linha $L(G)$ é o grafo que representa as arestas de G como vértices em $L(G)$, e unindo-as se as arestas partilharem um vértice. Na figura 4 temos o exemplo de um grafo e o seu grafo linha.

Teorema 4. *Seja Q um tabuleiro $n \times n$, e a cada entrada (i, j) associamos um conjunto $C_{(i,j)}$ de n cores. Então podemos pintar cada (i, j) de uma cor em $C_{(i,j)}$ tal que C é um quadrado latino.*

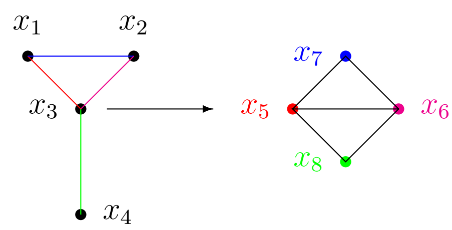

Figure 4: Grafos $\mathcal{T}$ e $L(\mathcal{T})$

Representamos as entradas de Q por vértices v de $L(G)$. Queremos provar que $L(G)$ é n-pintável, vamos dizer que o conjunto associados a cada vértice v é C_v

Consideremos a orientação ϕ das arestas de $L(G)$:

Nas colunas

- Temos $(i, j) \to (i', j)$ se $(i + j - 2) \mod n < (i' + j - 2) \mod n$.

Nas linhas

- Temos $(i, j) \to (i', j)$ se $(i + j - 2) \mod n > (i' + j - 2) \mod n$.

Não é a única orientação de $L(G)$ que funciona: na verdade, apenas exigimos das orientações que tenham $\delta_+(v) = n - 1\ \forall v \in V$ e que seja transitiva nas linhas e nas colunas, no sentido de que na coluna j, se $(i_1, j) \to (i_2, j)$ e $(i_2, j) \to (i_3, j)$ então $(i_1, j) \to (i_3, j)$, e analogamente para cada linha.

Agora introduzimos o primeiro lema de dois. Com a ajuda de tais lemas, o resultado segue trivialmente:

Lema 3. *"Qualquer subgrafo F do grafo $\phi(L(G))$ contem um núcleo.*

Prova:

Recordemos que os vértices de $L(G)$ têm uma representação como arestas em G.

Consideremos um subconjunto S de vértices de $L(K_{n,n})$. Associado a S temos um subconjunto A das arestas em $K_{n,n}$. Um emparelhamento em A é um conjunto independente de vértices em S.

Notemos agora que, em cada coluna, existe uma relação de ordem dada pela orientação ϕ. Em particular, podemos formar conjuntos ordenados $L_1, \cdots, L_n$ e $C_1, \cdots, C_n$ dados por ϕ em cada uma das colunas e linhas, restringidos apenas aos elementos de S. Isto é, cada L_i e C_i codifica uma ordenação, se $(i, j) \to (i, k)$ então em C_i tem-se $k \geq j$.

Obtemos então que o subgrafo correspondente a S em $K_{n,n}$ é um grafo bipartido com listas de preferências, pelo que existe um conjunto de arestas $S_\circ$ que forma um emparelhamento estável, pelo Lema 1. Vamos provar que a $S_\circ$ corresponde S_k, um núcleo em $L(S)$:

- Como $S_\circ$ é um emparelhamento, nenhum par de arestas partilha um vértice, logo nenhum par de vértice em S_k partilha uma aresta, isto é, S_k é um conjunto independente.

- Como $S_\circ$ é estável, para qualquer outra aresta (l, c) em $L(S)$, existe uma aresta $(a, b_1) \in S_\circ$ com $b_1 \geq_a b$ ou $(a_1, b) \in S_\circ$ com $a_1 \geq_b a$. Isto corresponde a existir um vértice $(a, b_1) \in S_k$ (ou $(a, b_1) \in S_k$), e como $b_1 \geq_a b$ (ou $a_1 \geq_b a$) concluimos, pela construção de ϕ, que existe a aresta de (a, b) para S_k.

□

Falta então apenas um lema:

Lema 4. *Se G é um grafo nuclear, tal que, para cada vértice $v \in V$ tem-se $f(v) > \delta_+(v)$, então G é f-pintável, onde δ_+ conta as arestas que saem de um vértice.*

Prova: Indução no número de cores disponíveis. Chamamos $C = \bigcup_{v \in V} C_v$, mais concretamente faremos indução em $\#C$.

Se $\#C = 1$, então todos os vértices em G terão de ser isolados pela condição $f(v) > \delta_+(v)$. Desta forma, podemos pintar todos da mesma (única) cor, e o caso base fica então provado.

No passo de indução, assumimos que existe uma cor em C a que chamamos "vermelho".

Comecemos por considerar todos os vértices que podem ser pintados da cor "vermelho", e encaixotamo-los todos no conjunto S. Por G ser nuclear, S admite um núcleo $S_\circ$. Esses vão ser os vértices verdadeiramente pintados de "vermelho", mas os restantes não serão pintados de tal cor.

Notemos que podemos pintar todos os vértices de $S_\circ$ da cor "vermelho", pois $S_\circ$ é independente por definição.

Comecemos por construir o grafo G_1 induzido pelos vértices $V(G) - S_\circ$. Ele será nuclear, e a todos os vértices v atribuimos a mesma lista de cores C_v exepto na cor vermelha, que será apagada. Para completar, G_1 terá apenas $\#C - 1$ cores disponíveis.

Para os vértices $v \notin S$ continuamos trivialmente a ter que $\#f(v) > \delta_+(v)$.

Se $v \in S - S_\circ$ o valor $\#f(v)$ decresceu numa unidade (pois atirámos a hipótece de se pintar v de "vermelho" para o lixo), no entanto, por definição de núcleo, existe pelo menos uma aresta de v para $S_\circ$, logo δ_+ decresce, pelo menos, em um valor, na passagem de G para G_1. Desta forma $\#f(v) > \delta_+(v)$ para cada $v \in G_1$. Por hipótece de indução, podemos concluir a pintura de G_1. □

Agora a junção destes dois lemas é natural: dado que $\phi(L(K_{n,n}))$ é nuclear e $\delta_+(v) = n - 1 < n \ \forall v \in V$, então $\phi(L(K_{n,n}))$ é n-pintável, com isto concluimos o **Teorema 1**.

6 Alguns problemas relacionados

Uma questão levantada pode ser a seguinte:

Sejam G, H grafos, suponhamos que $L(H) = G$, então tem-se:

$$\chi(G) = \chi_l(G)$$

Sabemos que a mesma questão para um grafo G genérico não é verdadeira. Um possível contra-exemplo será o grafo $K_{4,2}$, com vértices $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2\}$. Com as listas de cores

$L_1 = \{1, 2\}$;
$L_2 = \{3, 4\}$;
$L_3 = \{1, 3\}$;
$L_4 = \{4, 2\}$;
$L_5 = \{1, 4\}$;
$L_6 = \{3, 2\}$

é impossível criar uma coloração admissível. Naturalmente $\chi(K_{4,2}) = 2$, mas $\chi_l(K_{4,2}) > 2$.

Uma questão levantada no artigo publicado por Fred Galvin, o artigo com a solução da conjectura de Dinitz, é a seguinte.

Seja k_n o menor inteiro k tal que $L(K_{n,n})$ é f-pintável, onde $f(v_0) = k$ para um vértice, e $f(v) = n$ para os restantes. A prova de que $k_n \leq n$ é corolário da conjectura de Dinitz, e sabemos que $k_n > \frac{n}{2}$ (veja-se [7, 5]). O problema é

Será que $k_n < n$ para todo o $n > 2$?

Sabemos que para n=3 é verdade, visto que $k_3 = 2$, por exemplo.

Part V
De novo nos emparelhamentos estáveis

7 "The Matching Game"

Um jogo em tudo semelhante ao problema dos emparelhamentos é o *Matching Game*. É definido como um grafo dirigido num tabuleiro.

Existem dois conjuntos finitos de jogadores, jogadoras do conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots\}$ e jogadores do conjunto $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots\}$. Cada jogador de um conjunto tem uma ordem de preferência estrita de alguns outros elementos do conjunto oposto, os que considera serem aceitáveis. Um jogador prefere não ser emparelhado a ser emparelhado com alguém inaceitável. A ordem de preferência é modelada pelas arestas do grafo dirigido.

Portanto, os vértices do nosso grafo Γ vão ser pontos $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ onde a e b são mutuamente aceitáveis. A cada coluna do tabuleiro corrersponde um a_i, e a cada linha um b_i

As arestas dirigidas podem ser de dois tipos:

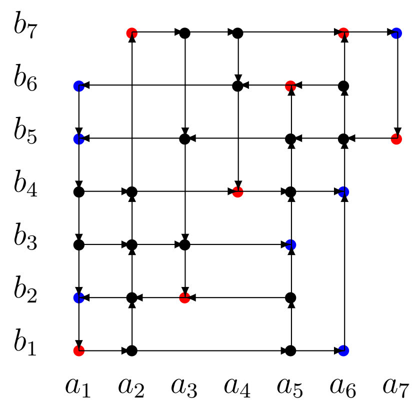

Figure 5: Exemplo de um *Matching Game*

- Horizontais, $(b, a_1) \to (b, a_2)$, traduzindo que $a_2 \geq_b a_1$
- Verticais, $(b_1, a) \to (b_2, a)$, traduzindo que $b_2 \geq_a b_1$

Na figura 5 temos um exemplo de um *Matching Game*, onde as arestas pressupostas por transitividade são omitidas. Nesse jogo temos 7 rapazes e 7 raparigas.

Neste problema, um emparelhamento μ é um subconjunto dos vértices do *Matching Game*. A estabilidade do emparelhamento também é dada por um critéro: μ é estável se cada vértice $v \notin \mu$ é **estável**, isto é, existe uma aresta (v, t) onde $t \in \mu$. Ou por outra, μ é estável se for um núcleo do *Macing Game*. Esta observação deve-se a Maffray, que em muito ajudou à resolução da Conjectura de Dinitz.

Dois *Matching Games* dizem-se equivalentes se o conjunto dos emparelhamentos estáveis é o mesmo.

Definição 8. *Nó topo-feminino (NTF) e nó topo-masculino (NTM), domínios*

Chamamos **Nó topo-feminino** a um vértice do *Matching Game* da forma (a, b), onde $b \geq_a t\ \forall t \in \mathcal{B}$, ou seja, b é o preferido da jogadora a.

De forma análoga definimos um **nó topo-masculino**

Dizemos que um NTF (respectivamente NTM) (a, b) **domina** (t, b) (resp. (a, t)) se $a >_b t$ (resp. $b >_a t$).

Exemplos de NTF e NTM estão a vermelho e azul, respectivamente, na figura 5.

Suponhamos agora, que um NTF $v = (a, b)$ não pertence a um emparelhamento estável μ. Então existe uma aresta de v para um vértice em μ. Por definição de NTF, só existem arestas de v para outro vértice, se esse mesmo vértice estiver na mesma linha. Logo algum dos vértices (t, b), com $t \geq_b a$, pertence a μ, então nenhum dos vértices (t, b), com $a >_b t$, pode pertencer a μ, pois μ é um conjunto de vértices independentes. Desta forma concluímos que, se v domina v_1, então $v_1 \notin \mu$. Na verdade, temos:

Teorema 5. *Se um vértice v domina v_1, então o Matching Game Γ' obtido eliminando o vértice v_1 é equivalente ao Matching Game original.*

Prova:
Seja μ' um emparelhamento estável de Γ'. Ou $v \in \mu$, ou v têm uma aresta (v, v') para algum v' em μ, e por transitividade, tal implica que existe a aresta (v_1, v'), logo v_1 é estável, pelo que μ' também é um emparelhamento estável de Γ.
Seja agora μ um emparelhamento estável de Γ. Como vimos, $v_1 \notin \mu$ logo μ também é estável em Γ' $\Box$.

Definição 9. *Matching Game livre*

Um *Matching Game* diz-se **Livre** se não existirem vértices dominados.

Como o *Matching Game* vazio é livre, à luz do **Teorema 3** podemos dizer que cada *Matching Game* é equivalente a um *Matching Game* livre, basta ir reduzindo os vértices do *Matching Game*.

Ao acabarmos de reduzir o *Matching Game* temos o seguinte resultado:

Teorema 6. *Num Matching Game livre, os emparelhamentos $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\mu_{\mathcal{B}}$ dados pelos NTF e NTM, respectivamente, são estáveis.*

Prova:
Veja-se [6, Lema 2] $\Box$

E chegamos agora a um resultado que já tínhamos descoberto, no contexto do algoritmo de "Propõe-Dispõe", mas com uma rotina totalmente diferente.

Teorema 7. *Emparelhamentos estáveis existem em cada Matching Game. podemos encontra-los usando uma rotina de complexidade $O(n^2)$, onde $n = \max\{\#\mathcal{A}, \#\mathcal{B}\}$*

Prova:
Pelo chamado algoritmo de redução. Recorrendo à eliminação de nós dominados chegamos a um *Matching Game* Livre, e pelo **Teorema 6** anterior, quer os NTF, quer os NTM, formam emparelhamentos $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\mu_{\mathcal{B}}$ estáveis.
Note-se que, como o *Matching Game* reduzido é equivalente ao inicial, é agora claro que $\mu_{\mathcal{B}}$ é óptimo para os rapazes, e pelo que provámos no **Lema 2**, tal emparelhamento é o mesmo que o algoritmo "Propõe-Dispõe" dá.
Para uma análise da complexidade, bem como da implementação do algoritmo de redução, veja-se [6, Theorem 1]. $\Box$

Lema 5. *Num Matching Game Γ, com Matching Game Livre equivalente Γ', (a, b) é eliminado se e só se $\mu_{\mathcal{B}}(b) <_b a$ ou $\mu_{\mathcal{A}}(a) <_a b$.*

Prova:
Veja-se [6, Lemma 3] $\Box$
Vamos agora apresentar o teorema que deixa claro que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, apesar de serem emparelhados, são equipas que jogam uma contra a outra.

Teorema 8. *Se μ e μ' são emparelhamentos estáveis de Γ, $(a, b) \in \mu$ e $\mu \geq_b \mu'$, então $\mu' \geq_a \mu$*

Prova:
Veja-se [6, Lemma 5] $\square$

Exercicio 4. *Encontra todos os emparelhamentos estáveis do Matching Game dado pelas listas de preferências:*
L_A*=(e, d, c, b, a)*
L_B*=(a, e, d, c, b)*
L_C*=(b, a, e, d, c)*
L_D*=(c, b, a, e, d)*
L_E*=(d, c, b, a, e)*
L_a*=(A, B, C, D, E)*
L_b*=(B, C, D, E, A)*
L_c*=(C, D, E, A, B)*
L_d*=(D, E, A, B, C)*
L_e*=(E, A, B, C, D)*

Exercicio 5. *Prova que, se não houver ninguém inaceitável, após o algoritmo "Propõe-Dispõe", no máximo, um homem ficou com a sua pior escolha.*

8 Contar emparelhamentos estáveis

Sabemos que, pelo menos, um casamento estável existe em cada *Matching Game*, mas em geral existem muitos.

Vamos dizer que a união disjunta de *Matching Games* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, P)$ e $(\mathcal{A}', \mathcal{B}', P')$ é um *Matching Game* $(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}', P'')$ onde jogadores de *Matching Games* diferentes consideram-se inadmissíveis. O seguinte lema é natural

Lema 6. *Supõe que o Matching Game Γ é a união de Maching Games disjuntos $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$, então:*
(i) Cada Γ_i é um Matching Game.
(ii) A emparelhamentos estáveis em cada um dos Γ_i corresponde um emparelhamento estável em Γ, e vice versa.

Podemos então dizer que o número que emparelhamentos estáveis $N(\Gamma)$ de Γ é dado por $\prod_{t=1}^{k} N(\Gamma_t)$.

Consideremos agora o *Matching Game* Λ dado por $\mathcal{A} = \{A, B\}$ e $\mathcal{B} = \{a, b\}$, com listas de preferências:
L_A=(a, b)
L_B=(b, a)
L_a=(B, A)
L_b=(A, B)

Então $N(\cup_{i=1}^{n}\Lambda) = n(\Lambda)^n = 2^n$, usando $4n$ pessoas.

Na verdade não estamos longe do melhor:

Teorema 9. *O número máximo de emparelhamentos estáveis é $o(a^x)$ onde x é o número de jogadores.*

Prova:

Veja-se [5, Theorem 5] $\square$

Definição 10. *Hipercubo*

Dados dois emparelhamentos estáveis comparáveis $\mu_+ \geq_{\mathcal{B}} \mu_-$ chamamos **hipercubo** *ao conjunto $H(\mu_+, \mu_-)$ dos emparelhamentos estáveis μ tal que, restrito a cada um de Γ_i, μ coincide com mu_+ ou μ_-, isto é, $\mu|\Gamma_i = \mu_+|\Gamma_i$ ou $\mu|\Gamma_i = \mu_-|\Gamma_i$.*

Façamos agora notar que podemos construir *Matching Games* cujo número de emparelhamentos estáveis percorre a sucessão de Fibonacci. Tal exemplo pode ser encontrado em [6, Lemma 7].

9 O reticulado de emparelhamentos estáveis

Definição 11. *Reticulado Distributivo*

Um conjunto $\mathcal{L}$, munido de uma ordem parcial $\geq_M$, diz-se um **Reticulado** *se, para cada $x, y \in \mathcal{L}$ existe um supremo $x \vee y \in \mathcal{L}$ e um infimo $x \wedge y \in \mathcal{L}$ que respeitam $x \vee y \geq_M x, y \geq_M x \wedge y$*

Um Reticulado diz-se **Distributivo** *se satisfaz $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ e $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*

O objectivo é provar que o conjunto dos emparelhamentos estáveis $\mathcal{L}(T)$ de um *Matching Game T* forma um Reticulado Distributivo.

Vamos começar com um pouco de terminologia. Vamos chamar a um padrão de preferências a $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, P)$ onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são finitos (representão respectivamente as raparigas e os rapazes), e P é representa as preferências, isto é, as listas ordenadas de cada um dos elementos de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = E$, o conjunto de todos os jogadores.

Um emparelhamento será uma função $\mu : E \to E$ tal que $\mu^2 = f_{id}$, e se $t \in \mathcal{A}$, então $\mu(t) = t$ ou $\mu(t) \in \mathcal{B}$. Analogamente também temos se $t \in \mathcal{B}$, então $\mu(t) = t$ ou $\mu(t) \in \mathcal{A}$.

Dizemos que $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é instável se $b \geq_a \mu(a)$ e $a \geq_b \mu(b)$, onde a notação utilizada é a orenação pela óptica que já introduzimos. Dizemos que um emparelhamento é estável se não existirem pares instáveis.

Lema 7. *Sejam μ e μ' emparelhamentos estáveis de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, P)$ e $(\mathcal{A}', \mathcal{B}, P')$, onde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$. Supõe que P e P' são coerentes com as preferências de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.*

Seja $\mathcal{A}_{\mu'}$ o conjunto de todas as raparigas que preferem estritamente μ' a μ. Seja $\mathcal{B}_\mu$ o conjunto de todos os rapazes que preferem estritamente μ a μ'.

Então μ e μ' são bisjeções entre $\mathcal{A}_{\mu'}$ e $\mathcal{B}_\mu$.

Prova:

Basta provar que $\mu'(\mathcal{A}_{\mu'}) \subseteq \mathcal{B}_\mu$ e $\mu(\mathcal{B}_\mu) \subseteq \mathcal{A}_{\mu'}$, pois os conjuntos são finitos, e as funções injectivas.

Desta forma, seja $b \in \mathcal{B}_\mu$. Como $\mu(b) \geq_b \mu'(b)$, então $\mu(b) \neq b$. Seja $a = \mu(b)$, logo $\mu(a) = b$, então pela estabilidade de μ', $\mu'(a) \geq_a b$. Ora $\mu'(a) \neq b$ pois $\mu'(b) <_b \mu(b) = a$, logo $\mu'(a) >_a b$ pelo que $a \in \mathcal{A}_{\mu'}$. Desta forma temos $\mu(\mathcal{B}_\mu) = \mu^{-1}(\mathcal{B}_\mu) \subseteq \mathcal{A}_{\mu'}$.

Obtemos então $\mu(\mathcal{B}_\mu) \subseteq \mathcal{A}_{\mu'}$, a outra inclusão é análoga. $\square$

Com este resultado podemos provar o chamado **Teorema dos tristes**

Teorema 10. *Se μ e μ' são emparelhamentos estáveis em $(\mathcal{A}', \mathcal{B}, P')$ e $\mu(t) = t$, então $\mu'(t) = t$. Isto é, se num emparelhamento estável, t não fica emparelhado, então não é emparelhado em nenhum emparelhamento estável.*

Prova:

Supõe que $\mu(t) = t$, mas $\mu'(t) = r \neq t$. Supomos sem perda de generalidade que $t \in \mathcal{A}$, então $t \in \mathcal{A}_{\mu'}$ (onde consideramos $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$). Pelo lema anterior, $t \in \mu(\mathcal{B}_\mu)$, contrariando $\mu(t) = t$.$\square$

Lema 8. *Sejam x e y como μ e μ', respectivamente, no Lema 7. Seja $x \vee y$ o emparelhamento que coincide com x em $M_1 = \mathcal{A}_y \cup \mathcal{B}_x$ e coincide com y em $M_2 = E - (\mathcal{A}_y \cup \mathcal{B}_x)$. Então $x \vee y$ é um emparelhamento estável.*

Analogamente, definimos $x \wedge y$ que coincide com y em M_1 e coincide com x em M_2. Então $x \wedge y$ também é um emparelhamento estável.

Prova:

Veja-se [4, Lemma 2] $\square$

Notemos que, para construir $x \vee y$ basta emparelhar cada rapaz b à rapariga que ele prefere entre $x(b)$ e $y(b)$. A construção de $x \wedge y$ é análoga, mas sendo as raparigas a escolher. É natural que destes emparelhamentos, $x \vee y$ seja melhor para os rapazes e $x \wedge y$ melhor para as raparigas.

Definição 12. *Dizemos que $\mu \geq_{\mathcal{B}} \mu'$ se $\mu(t) \geq_t \mu'(t)$ $\forall t \in \mathcal{B}$*

Definição 13. *Supremo, Infimo*

Dados dois emparelhamentos estáveis, x, y, definimos como supremo o emparelhamento $x \vee y$, e como ínfimo $x \wedge y$

É de enfatizar que, pela definição de supremo e infimo, que $x \vee y \geq_{\mathcal{B}} x \geq_{\mathcal{B}} x \wedge y$. Desta forma, concluímos que o conjunto dos emparelhamentos estáveis forma um *latice*. Resta provarmos que é distributivo para obter:

Teorema 11. *O conjunto $\mathcal{L}(\Gamma)$ dos emparelhamentos estáveis, com a relação de ordem $\geq_{\mathcal{B}}$, forma um Latice Distributivo.*

Prova:

Já vimos atrás que $\mathcal{L}(\Gamma)$ forma um Latice, falta agora ver que é distributivo.

Para cada elemento t de $\mathcal{B}$ podemos notar que $x \vee (y \wedge z)(t) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)(t)$, logo $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Analogamente temos $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.$\square$

10 Geometria

Vamos agora transformar o problema do *Matching Game* num problema de optimização linear. Um polítopo é o que chamamos a uma região limitada de $\mathbb{R}^n$, definida por desigualdades lineares. Por exemplo o triângulo definido pelo conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y < 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ é um polítopo.

Ao nosso *Matching Game* Γ, com V vértices, associamos um polítopo $P(\Gamma) \subset \mathbb{R}^V$ dado por:

$P(\Gamma) = \{x = (x_{(a,b)})_{(a,b)\in\Gamma}$:

(0)

$$x \geq 0$$

(1)

$$\sum_{a:(a,b)\in\Gamma} x_{(a,b)} \leq 1, \ \ \forall b \in \mathcal{B}$$

(2)

$$\sum_{b:(a,b)\in\Gamma} x_{(a,b)} \leq 1, \ \ \forall a \in \mathcal{A}$$

(3)

$$x_{(a,b)} + \sum_{(a',b')\in suc((a,b))} x_{(a',b')} \geq 1, \ \ \forall (a,b) \in \Gamma\}$$

Onde $suc(v)$ é o conjunto dos sucessores de v, os vértices v' para os quais existe uma aresta (v,v').

Naturalmente, para cada $x \in P(\Gamma)$ temos $0 \leq x \leq 1$. Notemos que a cada ponto de coordenadas inteiras de $P(\Gamma)$ podemos corresponder um emparelhamento estável de Γ: seja $x \in P(\Gamma)$ tal ponto, e consideremos $\mu = \{(a,b) | x_{(a,b)} = 1\}$, então por (1) e (2), μ é um emparelhamento, e por (3) é estável.

Como tal vamos chamar aos próprios pontos de coordenadas inteiras em $P(\Gamma)$ de emparelhamentos estáveis de Γ.

Lema 9. *Seja* $x \in P(\Gamma)$, *e consideremos* $x^{(\epsilon)}$, *para* $|\epsilon| < \min\{x_{(a,b)} | x_{(a,b)} > 0\}$, *dado por:*

- $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} + \epsilon$, *se* $x_{(a,b)} > 0$ *e os seus sucessores na linha de* b, (a',b) *têm* $x_{(a',b)} = 0$
- $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} - \epsilon$, *se* $x_{(a,b)} > 0$ *e os seus antecessores na linha de* b, (a',b) *têm* $x_{(a',b)} = 0$
- $x(\epsilon)_{(a,b)} = x_{(a,b)}$ *se nenhuma ou ambas as condições anteriores se verificarem.*

Então $x^{(\epsilon)} \in P(\Gamma)$

Prova:

Notemos que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} \geq 0$, e que $\sum_{a:(a,b)\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = \sum_{a:(a,b)\in\Gamma} x_{(a,b)} \leq 1$, $\forall b \in \mathcal{B}$, pois em cada linha apenas dois valores alteram-se em sentidos simétricos. Portanto as condições nas linhas estão tratadas.

Para provar a desigualdade das colunas, vamos provar que em cada coluna, ou nenhuma entrada fica diferente, ou duas alteram o seu valor, simetricamente. Sem perder generalidade, supomos que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} + \epsilon$, então por definição temos

$$\sum_{a' >_b a:(a',b)\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a',b)} = 0$$

no entanto

$$x_{(a,b)} + \sum_{b' >_a b:(a,b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a,b')} \geq 1$$

pela equação (3).

Pela equação (2) temos que

$$\sum_{b' <_a b:(a,b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a,b')} = 0 \Leftrightarrow x^{(\epsilon)}_{(a,b')} = 0 \;\; \forall b' <_a b : (a,b') \in \Gamma$$

isto usando apenas o facto de que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} + \epsilon$. Logo em cada coluna existe, no máximo um ponto tal que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} + \epsilon$. De forma análoga concluimos que também só existe em cada coluna, no máximo, um ponto tal que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} - \epsilon$.

Resta agora provar que, se existe um, existe outro. Voltamos a supor, sem perda de generalidade, que existe (a,b) tal que $x^{(\epsilon)}_{(a,b)} = x_{(a,b)} + \epsilon$.

Seja agora (a,b') tal que $x_{(a,b'')} = 0 \; \forall b'' >_a b$ e $x_{(a,b')} > 0$. Como tal, pela equação (3) temos

$$\sum_{a' \geq_{b'} a:(a,b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a,b')} = x_{(a,b')} + \sum_{(a',b''')\in suc((a,b'))} x_{(a',b''')} \geq 1$$

e pela equação (1) temos

$$\sum_{a' \geq_{b'} a:(a,b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a,b')} \leq \sum_{a':(a',b')\in\Gamma} x_{(a',b')} \leq 1$$

Logo $\sum_{a' \geq_{b'} a:(a',b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a',b')} = 1$ e então

$$\sum_{a' <_{b'} a:(a',b')\in\Gamma} x^{(\epsilon)}_{(a',b')} = 0 \Leftrightarrow x^{(\epsilon)}_{(a',b')} = 0 \;\; \forall a' <_{b'} a : (a',b') \in \Gamma$$

logo $x^{(\epsilon)}_{(a,b')} = x_{(a,b')} - \epsilon$ como queríamos demonstrar.

Para demonstrar que a equação (3) é respeitada, basta notar que para cada (a,b) temos

$$x_{(a,b)} + \sum_{(a',b')\in suc((a,b))} x_{(a',b')} \geq 1$$

e, como vimos a trás, (a, b) têm dois sucessores (ou ele próprio é), um na linha, e outro na coluna, cujos valores em x^ϵ foram alterados, em sentidos simétricos. Logo a desigualdade continua a verificar-se. $\square$

Teorema 12. *Os vértices do polítopo são emparelhamentos estáveis de* Γ

Prova:

Pelo lema anterior, se x têm valores não inteiros, então para $\epsilon \neq 0$ temos $x^{(\epsilon)} \neq x^{(-\epsilon)}$ pelo que

$$x = \frac{x^{(\epsilon)} + x^{(-\epsilon)}}{2}$$

logo x não é um vertice.

Notámos à bocado que $P(\Gamma)$ está contido no hipercubo $H = \{x \in \mathbb{R}^V | 1 \geq x \geq 0\}$, cujos vértices são os pontos de coordenadas inteiras de H, logo os pontos de coordenadas inteiras de $P(\Gamma)$ também são vértices de $P(\Gamma)$ $\square$

Vamos agora notar que a estrutura do polítopo é semelhante à estrutura do latice distributivo formado pelos casamentos estáveis.

Teorema 13. *Dois vértices μ_- e μ_+ partilham uma aresta se e só se:*

(i) μ_- e μ_+ são comparáveis, digamos, $\mu_- \leq_{\mathcal{B}} \mu_+$.

(ii) Não existe outro par de vértices μ e μ' tal que $\mu \vee \mu' = \mu_+$ e $\mu \wedge \mu' = \mu_-$

Prova:

Vamos aqui provar apenas uma das implicações.

Primeiramente fazemos notar que, sendo x e y emparelhamentos estáveis, temos

(5)

$$x + y = x \vee y + x \wedge y$$

Relembramos que consideramos x e y tanto casamentos estáveis como pontos, logo temos as operações $+$ e $\vee$ definidas sobre eles.

Para provar (5) basta contar cada coordenada: se (a, b) não pertence a nenhum ou a ambos de entre x, y, então, respectivamente, não pertence a nenhum ou a ambos os $x \vee y$ e $x \wedge y$; se só pertence a um deles, então b não é indiferente à escolha entre x e y, logo um deles deve ser preferível.

Caso 1: (a, b) é um emparelhamento preferível, então, pela construção de $x \vee y$ temos que $(x \vee y)_{(a,b)} = 1$ e $(x \wedge y)_{(a,b)} = 0$

Caso 2: (a, b) não é um emparelhamento preferível, e temos $(x \vee y)_{(a,b)} = 0$ e $(x \wedge y)_{(a,b)} = 1$.

Concluimos, em ambos os casos, que $x_{(a,b)} + y_{(a,b)} = x \vee y_{(a,b)} + x \wedge y_{(a,b)}$, para cada (a, b), logo temos (5).

Vamos agora provar o teorema: temos que, x e y são vértices que partilham um aresta se e só se o ponto médio $\frac{x+y}{2}$ é unicamente descrito como combinação linear dos vértices. Supomos que μ_+ e μ_- são vértices que partilham uma aresta.

Se μ_- e μ_+ não são comparáveis, então $\{\mu, \mu'\} \neq \{\mu \vee \mu', \mu \wedge \mu'\}$, e temos $\mu_- + \mu_+ = \mu_- \vee \mu_+ + \mu_- \wedge \mu_+$, pelo que μ_- e μ_+ não partilham uma aresta, contradição.

Supomos agora que μ_- e μ_+ são comparáveis, mas não respeitam (ii). Dessa forma, temos $\mu' + \mu = \mu' \vee \mu + \mu' \wedge \mu = \mu_- + \mu_+$, contrariando a hipótese de que μ_+ e μ_- partilharem uma aresta.

Com isto provámos que, se dois vértices partilham uma aresta, respeitam (i) e (ii). Para a implicação contrária, veja-se [5, Theorem 10] $\Box$

Teorema 14. *As faces F do polítopo $P(\Gamma)$ são o invólucro convexo de emparelhamentos estáveis que satisfazem:*

(i) Para cada par de emparelhamentos estáveis μ e μ' não comparáveis em F, $\mu \vee \mu'$ e $\mu \wedge \mu'$ estão també me F

(ii) Para cada par de emparelhamentos μ e μ' comparáveis em F, o hipercubo $H(\mu, \mu')$ está contido em F também.

Prova:

Veja-se [5, Theorem 11] $\Box$

Teorema 15. *As faces de $P(\Gamma)$ são completamente definidas por $\mathcal{L}(\Gamma)$.*

Prova:

O teorema anterior diz-nos que as fazes são sublatices do latice $\mathcal{L}(\Gamma)$, com a propriedade que para cada par de emparelhamentos μ e μ' comparáveis em F, o hipercubo $H(\mu, \mu')$ está contido em F também. Essa informação está toda em $\mathcal{L}(\Gamma)$, logo as faces de $P(\Gamma)$ são completamente definidas por $\mathcal{L}(\Gamma)$ $\Box$

Part VI
Referências

[1] Martin Aigner, *Proofs From The Book*;

[2] David Gale and L. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriages*;

[3] L.E. Dublin and D.A. Freedman, *Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm*;

[4] David Gale and Marilda Sotomayor, *Machiavelli and the stable-matching problem*;

[5] Michael Balinski and Guillaume Raiter, *Of Stable Mariages and Graphs, and strategy, and polytopes*;

[6] Michael Balinski and Guillaume Raiter, *Graphs And Mariages*;

[7] Fred Galvin, *The List Cromatic Index of a Bipartite Multigraph*;

[8] Donald E. Knuth, *Martiages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*; De onde os exercícios 2, 3, 4 e 5 foram extraídos.

Part VII
Agradecimentos

Findo o projecto Novos Talentos em Matemtica, gostaria de agradecer ao meu tutor José Fachada por me ter orientado num tema novo, e em tudo o que foi possível, e em geral à fundação Calouste Gulbenkian pela oportunidade que me deu em trabalhar num projecto do meu agrado.

Gostaria também de agradecer à equipa do Seminário diagonal, do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, a ajuda que deram e a oportunidade de apresentar parte deste trabalho a interessados.